Arte, Matemática e os Limites da Inteligênica Artificial

Johann Sebastian Bach (1685 - 1750)

José Roberto Aguilar (1941 -)

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972)

Douglas Hofstadter (1945 -)

Kurt Gödel (1906 - 1978)

Até que ponto é possível mimetizar formalmente/mecanicamente nossas faculdades mentais? Será possível que encontremos um substituto mecânico/informático para nosso cérebro? Há limites para a inteligência artificial? A proposta é responder que sim, há um limite para as pretensões da inteligência artificial. Tal resposta será obtida através de uma aproximação inusitada entre arte e matemática. É justamente o aspecto comum que a arte e a matemática compartilham que é inatingível através de formalização e mecanização. Ele distingue nossa capacidade cognitiva da das máquinas e configura-se em um limite teórico para a inteligência artificial. Pretendo, nesta conferência, utilizar algumas ideias muito interessantes do famoso livro de Douglas Hofstadter (Gödel, Escher and Bach) para mostrar como o também famoso Teorema de Gödel pode evidenciar este limite teórico intransponível à inteligência artificial.

Parte 1

O que significa ser humano?
O que nos separa dos outros seres, vivos e não vivos?

O que significa ser humano?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?
- Se não, por que não?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?
- Se não, por que não?
- Se sim, o que?

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?
- Se não, por que não?
- Se sim, o que?
- Quando penso em respostas a estas perguntas, duas alternativas antagônicas me vêm à mente:

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?
- Se não, por que não?
- Se sim, o que?
- Quando penso em respostas a estas perguntas, duas alternativas antagônicas me vêm à mente:
    - Razão
    - Arte

O que significa ser humano?

- Haverá algo que distingue a nós, humanos, dos outros seres vivos?
- Haverá algo que nos distingue das máquinas?
- Haverá algo que todos nós, humanos, fazemos, e que nenhum outro ser vivo, nem o computador mais sofisticado concebível, seria capaz de fazer?
- Se não, por que não?
- Se sim, o que?
- Quando penso em respostas a estas perguntas, duas alternativas antagônicas me vêm à mente:
    - Razão $\longrightarrow$ matemática (caso exemplar)
    - Arte $\longrightarrow$ criação livre, não instrumental

Sistemas formais – o sistema mg

VOCABULÁRIO:

m, g, •

BOA FORMAÇÃO:

- seqüencia de •
- seguida de m
- seguido de outra seqüência de •
- seguida de g
- seguido de mais uma seqüência de •

Sistemas formais – o sistema mg

VOCABULÁRIO:

m, g, •

BOA FORMAÇÃO:

- seqüencia de •
- seguida de m
- seguido de outra seqüência de •
- seguida de g
- seguido de mais uma seqüência de •

EXEMPLOS: (sentenças gramaticalmente corretas e incorretas)

☺	• m • g •	☹	• m g • •
☺	• m • • • g • •	☹	m • • g • • •
☺	• • • m • • g • • • • • •	☹	• • g • g • • •

Sistemas formais – o sistema mg

<u>AXIOMAS</u>: Suponha que x indica uma seqüencia qualquer de •'s

$$\boxed{x\ \mathrm{m} \bullet \mathrm{g}\ x \bullet}$$

<u>EXEMPLOS DE AXIOMAS</u>:

• m • g • •	($x = 1$)
• • m • g • • •	($x = 2$)
• • • m • g • • • •	($x = 3$)
• • • • m • g • • • • •	($x = 4$)

Sistemas formais – o sistema mg

AXIOMAS: Suponha que x indica uma seqüencia qualquer de •'s

$$\boxed{x\ \mathrm{m}\ \bullet\ \mathrm{g}\ x\ \bullet}$$

EXEMPLOS DE AXIOMAS:

• m • g • •	($x = 1$)
• • m • g • • •	($x = 2$)
• • • m • g • • • •	($x = 3$)
• • • • m • g • • • • •	($x = 4$)

REGRA: Suponha que x, y e z representem seqüencias de •'s:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{x\ \mathrm{m}\ y\ \mathrm{g}\ z} \\ x\ \mathrm{m}\ y\ \bullet\ \mathrm{g}\ z\ \bullet \end{array}}$$

Sistemas formais – o sistema mg

Exemplos de **Teoremas**:

axioma	x m • g x •	regra	$\dfrac{x \text{ m } y \text{ g } z}{x \text{ m } y \bullet \text{g } z \bullet}$

• • m • • g • • • •	$\dfrac{\bullet\bullet \text{ m } \bullet \text{ g } \bullet\bullet\bullet}{\bullet\bullet \text{ m } \bullet\bullet \text{ g } \bullet\bullet\bullet\bullet}$	(ax, $x = 2$)
• • m • • • g • • • • •	$\dfrac{\dfrac{\bullet\bullet \text{ m } \bullet \text{ g } \bullet\bullet\bullet}{\bullet\bullet \text{ m } \bullet\bullet \text{ g } \bullet\bullet\bullet\bullet}}{\bullet\bullet \text{ m } \bullet\bullet\bullet \text{ g } \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}$	(ax, $x = 2$)
• m • g • •		(ax, $x = 1$)

Sistemas formais – o sistema mg

Exemplos de **Não-teoremas**:

axioma	x m • g x •	regra	$\dfrac{x\ \mathrm{m}\ y\ \mathrm{g}\ z}{x\ \mathrm{m}\ y\ \bullet\ \mathrm{g}\ z\ \bullet}$

• • m • g •	o menor axioma (x=1) tem duas bolas depois de 'g' e aplicação de regras só aumenta o número de bolas.
• • m • • • g • • • •	a regra nunca muda o número de bolas antes de 'm', então o único axioma possível é (x=2): • • m • g • • • x • • m • • g • • • • x • • m • • • g • • • • • x
• m • g • • •	o único axioma com uma bola antes de 'm' é (x=1): • m • g • • x • m • • g • • • x • m • • • g • • • • x

Sistemas formais – o sistema mg

Teoremas	Não-teoremas	Erros gramaticais
• • m • • g • • • •	• • m • g •	• m g • •
• • m • • • g • • • • •	• • m • • • g • • • •	m • • g • • •
• m • g • •	• m • g • • •	• • g • g • • •

- Há uma forma de caracterizar todos os teoremas do sistema mg?
- Será que os teoremas do sistema mg **significam** alguma coisa?

Sistemas formais – o sistema mg

Teoremas	Não-teoremas	Erros gramaticais
• • m • • g • • • •	• • m • g •	• m g • •
• • m • • • g • • • • •	• • m • • • g • • • •	m • • g • • •
• m • g • •	• m • g • • •	• • g • g • • •

- Há uma forma de caracterizar todos os teoremas do sistema mg?
- Será que os teoremas do sistema mg **significam** alguma coisa?
  - Nós, humanos, buscamos significados. Nós não nos contentamos com as coisas conforme elas nos aparecem. Nós as enchemos de significados que não fazem parte delas!

Significado como isomorfismo

ADIÇÃO: "*x* m *y* g *z*" será um teorema do sistema mg se e somente se o número de • em *z* é a soma do número de • em *x* e *y* !

m	⇔	mais	⇔	+
g	⇔	igual	⇔	=
•	⇔	um	⇔	1
• •	⇔	dois	⇔	2
• • •	⇔	três	⇔	3
	etc.		etc.	

Significado como isomorfismo

ADIÇÃO: "*x* m *y* g *z*" será um teorema do sistema mg se e somente se o número de • em *z* é a soma do número de • em *x* e *y*!

m	⇔	mais	⇔	+
g	⇔	igual	⇔	=
•	⇔	um	⇔	1
• •	⇔	dois	⇔	2
• • •	⇔	três	⇔	3
	etc.		etc.	

Teoremas		Não-teoremas		Erros gramaticais	
• • m • • g • • • •	2+2=4	• • m • g •	2+1=1	• m g • •	1+=2
• • m • • • g • • • • •	2+3=5	• • m • • • g • • • •	2+3=4	m • • g • • •	+2=3
• m • g • •	1+1=2	• m • g • • •	1+1=3	• • g • g • • •	2=1=3

Significado como isomorfismo

ISOMORFISMO:	• Transformação que preserva informação. • Sobreposição de duas estruturas complexas de forma que a cada parte de uma estrutura há uma parte <u>correspondente</u> na outra estrutura. • "<u>correspondente</u>" significa que as duas partes têm papéis similares em suas respectivas estruturas.

A descoberta de um isomorfismo entre duas estruturas conhecidas é um avanço significativo no conhecimento:

"É a percepção de isomorfismos que cria significado na mente das pessoas"?

O significado do sistema mg foi dado pelo reconhecimento do isomorfismo entre seus teoremas e as somas aritméticas.

Razão e formalização

- **Será que todo nosso pensamento segue regras formais?**

- Será que nossa capacidade racional pode ser captada-representada POR COMPLETO através de regras formais?

  - Seria possível construir um sistema formal (ou uma máquina) capaz de raciocinar com a mesma habilidade que os seres humanos?

  - Conseguiria esta máquina resolver todos os problemas que nosso pensamento é capaz de resolver?

  - Haveria um isomorfismo entre nossa razão e algum sistema formal?

  - Em caso negativo, qual seria o motivo de tal impossibilidade?

Razão e formalização

Será que toda a nossa razão segue regras formais?

sim → Há um isomorfismo entre nossa razão e um sistema formal.

não → Há algo em nossa razão incapaz de ser capturado por regras formais.

Razão e formalização

Será que toda a nossa razão segue regras formais?

sim → Há um isomorfismo entre nossa razão e um sistema formal.

não → Há algo em nossa razão incapaz de ser capturado por regras formais.

Qual seria a característica de nossa razão incapaz de ser capturada por regras formais?

Limite para a formalização

Principalmente quando pensamos em uma resposta negativa às questões anteriores, é muito comum que evoquemos a **arte** como a atividade que evidencia que há algo mais em nossa razão e linguagem que jamais será reproduzido por qualquer sistema formal!

A arte seria humana. Não seria passível de formalização e maquinização.

Por que?

Limite para a formalização

Principalmente quando pensamos em uma resposta negativa às questões anteriores, é muito comum que evoquemos a **arte** como a atividade que evidencia que há algo mais em nossa razão e linguagem que jamais será reproduzido por qualquer sistema formal!

A arte seria humana. Não seria passível de formalização e maquinização.

Por que?

Porque a arte parece livre, parece não se submeter a regras!
E todo sistema formal se baseia em regras!

www.piglette.com

"Minha arte é inteiramente gerada por computador e baseada exclusivamente na habilidade estética da matemática. Todos os meus trabalhos são resultados de processos autônomos executados por programas de computador que eu próprio desenvolvo [...]. Os algoritmos são meu desafio criativo e as imagens que emergem minha emoção artística. Este é o meu modo de fazer arte gerativa."

Bogdan Soban

http://www.soban-art.com/index.asp

Arte ou não?

- Podemos nos questionar sobre se isto é arte ou não!
- Podemos nos questionar sobre a autoria de tais trabalhos:
  - O artista disponibiliza no site os programas para quem quiser baixar e executá-los. Mudanças nos parâmetros de execução resultarão em imagens diferentes.
  - Se você baixar o programa, brincar bastante com os parâmetros de execução até encontrar uma determinada imagem que considere boa, esta "obra" será sua ou de Soban?

Arte ou não?

- Podemos nos questionar sobre se isto é arte ou não!
- Podemos nos questionar sobre a autoria de tais trabalhos:
  - O artista disponibiliza no site os programas para quem quiser baixar e executá-los. Mudanças nos parâmetros de execução resultarão em imagens diferentes.
  - Se você baixar o programa, brincar bastante com os parâmetros de execução até encontrar uma determinada imagem que considere boa, esta "obra" será sua ou de Soban?
- Mas a pergunta que considero mais relevante é a seguinte:

Quanto de nossas possibilidades de expressão artística pode ser mimetizado desta maneira em sistemas computacionais?

Arte e formalização

Será que toda nossa capacidade artística segue regras formais?

sim

Há um isomorfismo entre nossa capacidade artística e um sistema formal.

não

Há algo em nossa arte incapaz de ser capturado por regras formais.

Arte e formalização

Será que toda nossa capacidade artística segue regras formais?

sim → Há um isomorfismo entre nossa capacidade artística e um sistema formal.

não → Há algo em nossa arte incapaz de ser capturado por regras formais.

Qual seria a característica de nossa arte incapaz de ser capturada por regras formais?

Arte e liberdade

- É um equívoco pensar que a arte é o terreno da liberdade pura, onde não há qualquer tipo de enquadramento em regras formais.
  - Qualquer um que já tentou fazer um desenho realista, ou harmonizar uma simples melodia sabe que as artes estão longe de estarem livres de regras formais.
  - Mas qual o papel destas regras na arte?

Arte e liberdade

- **Pintura (figurativa) –** regras formais da representação:
  - perspectiva, sombras lógicas, ...

- **Pintura (abstrata) –** regras formais da psicologia e fisiologia da percepção:
  - cor, forma, textura, composição, espaço pictórico,...

- **Música**
  - ritmo, melodia, harmonia,...

O que é arte?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?

- O que caracteriza um conjunto de sons como música?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?
- O que caracteriza um conjunto de sons como música?
- O que faz com que certos movimentos do corpo sejam dança?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?
- O que caracteriza um conjunto de sons como música?
- O que faz com que certos movimentos do corpo sejam dança?
- Por que certas imagens que produzimos são artes visuais e outras não?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?
- O que caracteriza um conjunto de sons como música?
- O que faz com que certos movimentos do corpo sejam dança?
- Por que certas imagens que produzimos são artes visuais e outras não?
- Por que o “Urinol” de Marcel Duchamp é uma escultura e o do banheiro aqui do corredor não é?

O que é arte?

- O que torna um texto literatura?
- O que caracteriza um conjunto de sons como música?
- O que faz com que certos movimentos do corpo sejam dança?
- Por que certas imagens que produzimos são artes visuais e outras não?
- Por que o “Urinol” de Marcel Duchamp é uma escultura e o do banheiro aqui do corredor não é?
- O que distingue uma mentira de uma encenação teatral?

Uma característica da arte: *ressignificação*

- quando uma palavra /sentença não tem mais o uso padrão e o papel utilitário e corriqueiro, o discurso se torna literatura, poesia.

- quando um som não é mera conseqüência de um fenômeno, nem mero código que carrega mensagem de outra natureza, ele se torna música.

- quando as formas, cores e texturas se deslocam de sua significância usual, e deixam de ser registros esquemáticos, tornam-se pintura.

Uma característica da arte: *ressignificação*

- quando uma palavra /sentença não tem mais o uso padrão e o papel utilitário e corriqueiro, o discurso se torna literatura, poesia.

- quando um som não é mera conseqüência de um fenômeno, nem mero código que carrega mensagem de outra natureza, ele se torna música.

- quando as formas, cores e texturas se deslocam de sua significância usual, e deixam de ser registros esquemáticos, tornam-se pintura.

Parece que estamos no campo da arte quando há um deslocamento da interpretação usual, uma *ressignificação*:

- Fazemos arte quando retiramos nossas realizações de seus contextos utilitários e as tornamos inúteis através de nossas ressinificações. Fazemos arte quando brincamos.

Ressignificação em sistemas formais

<u>Outro Significado para o Sistema mg</u>:

m	⇔	igual
g	⇔	subtraído de
•	⇔	um
• •	⇔	dois
• • •	⇔	três
	etc.	

- O Mesmo Sistema mg agora significa: **SUBTRAÇÃO**.

Teoremas	adição	subtração
• • m • • g • • • •	2+2 = 4	2 = 2 subtraído de 4
• • m • • • g • • • • •	2+3 = 5	2 = 3 subtraído de 5
• m • g • •	1+1 = 2	1 = 1 subtraído de 2

A inevitabilidade da ressignificação

- Um sistema formal traduz em regras simbólicas determinada interpretação. Mas não há nada que nos impeça de reinterpretarmos de outra forma o sistema formal.

- Foi explorando esta possibilidade que o famoso matemático **Kurt Gödel** provou seus teoremas da incompletude que atestam certas limitações fundamentais de nossos sistemas formais.

- O que nos impede de construirmos sistemas formais completos para a nossa **razão**, para nossa **linguagem**, para a **matemática** e para nossas **artes**, reside no fato de que não podemos evitar de reinterpretar!

Arte e matemática

- Em um certo sentido, é justamente porque tomamos certas **liberdades artísticas** com os sistemas formais, ao ressignificá-los, que percebemos suas limitações.

- O que aproxima a arte, a linguagem e a matemática não é um suposto domínio da matemática sobre as duas primeiras, mas, ao contrário, é o nosso impulso artístico fundamental de reinterpretação que caracteriza a arte e pervade todas as nossas atividades cognitivas.

Arte e matemática

- Em um certo sentido, é justamente porque tomamos certas **liberdades artísticas** com os sistemas formais, ao ressignificá-los, que percebemos suas limitações.

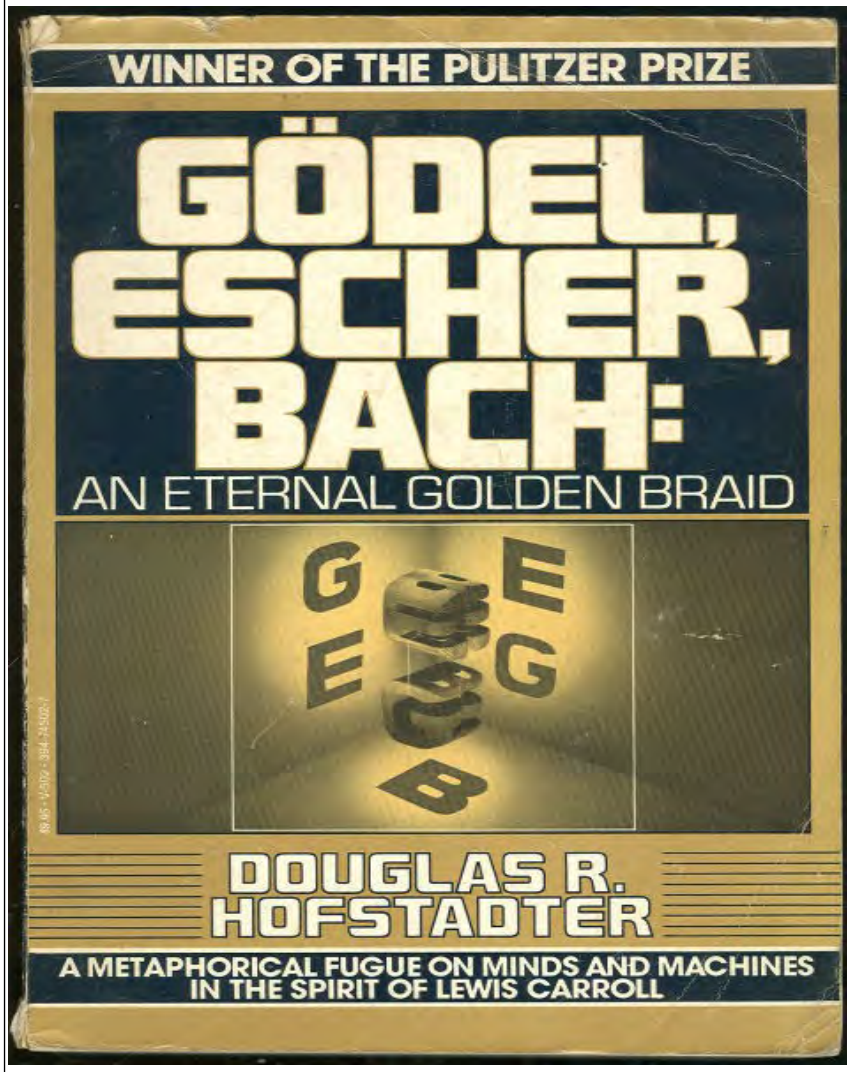
- O que aproxima a arte, a linguagem e a matemática não é um suposto domínio da matemática sobre as duas primeiras, mas, ao contrário, é o nosso impulso artístico fundamental de reinterpretação que caracteriza a arte e pervade todas as nossas atividades cognitivas.

É justamente porque somos, todos nós, um pouco artistas, porque deslocamos, reinterpretamos, ressignificamos, que nossas habilidades não se resumem a regras formais.

Parte 2

Por que e como a ressignificação de sistemas formais evidencia sua limitação?

Hofstadter – Gödel, Escher e Bach



- De que maneira a ressignificação nos mostra os limites dos sistemas formais ?
- O famoso Teorema de Gödel sobre os sistemas formais para a aritmética é a raiz desta limitação.
- Hofstadter escreveu um maravilhoso livro no qual ele usa justamente a arte para ilustrar a ressignificação e nos conduzir pelas pegadas de Gödel.

Johann Sebastian Bach

- Alemanha – 1685 a 1750.

- Em 1747 Bach, após uma visita à corte de Frederico da Prússia, em Potsdam, Bach escreveu "*Uma Oferenda Musical*" – um conjunto de peças musicais, todas elas baseadas em um tema (seqüência melódica) que o próprio rei compôs e lhe apresentou, durante sua visita, para que improvisasse.

- **"Uma Oferenda Musical"** era composta por uma fuga em três vozes, uma fuga em seis vozes, uma sonata para trio e dez canons.

- A fuga em seis vozes e alguns dos canons desta obra estão entre as composições mais complexas de Bach.

Canons

<u>CANON</u>: um único tema é tocado contra si próprio.

- Várias vozes executam cópias do mesmo tema.
- Há muitas maneiras de fazer isso:

<u>DIRETA</u>:

- A primeira voz inicia o tema. Após um número fixo de compassos, a segunda voz inicia uma cópia idêntica do tema, no mesmo tom.
- Após o mesmo tempo de atraso na segunda voz, a terceira voz inicia outra cópia idêntica do tema, também no mesmo tom, e assim por diante.

Canons

<u>CANON</u>: um único tema é tocado contra si próprio.

- Várias vozes executam cópias do mesmo tema.
- Há muitas maneiras de fazer isso:

<u>DIRETA</u>:

- A primeira voz inicia o tema. Após um número fixo de compassos, a segunda voz inicia uma cópia idêntica do tema, no mesmo tom.
- Após o mesmo tempo de atraso na segunda voz, a terceira voz inicia outra cópia idêntica do tema, também no mesmo tom, e assim por diante.

Canons

<u>CANON</u>: um único tema é tocado contra si próprio.

- Várias vozes executam cópias do mesmo tema.
- Há muitas maneiras de fazer isso:

<u>DIRETA</u>:

- A primeira voz inicia o tema. Após um número fixo de compassos, a segunda voz inicia uma cópia idêntica do tema, no mesmo tom.
- Após o mesmo tempo de atraso na segunda voz, a terceira voz inicia outra cópia idêntica do tema, também no mesmo tom, e assim por diante.

Canons

<u>CANON</u>: um único tema é tocado contra si próprio.

- Várias vozes executam cópias do mesmo tema.
- Há muitas maneiras de fazer isso:

<u>DIRETA</u>:

- A primeira voz inicia o tema. Após um número fixo de compassos, a segunda voz inicia uma cópia idêntica do tema, no mesmo tom.
- Após o mesmo tempo de atraso na segunda voz, a terceira voz inicia outra cópia idêntica do tema, também no mesmo tom, e assim por diante.

- Exemplo: ***Frère Jacques***. ‹link›

Notas com múltiplos significados

- A maioria das melodias não se harmonizam com sigo mesma desta forma.
- Para que um tema seja adequado a um canon, cada nota deve ser capaz de executar um papel duplo (ou triplo, ou quádruplo):
  - Ela tem um papel melódico: faz parte da melodia.
  - Ela tem um papel harmônico: faz parte da harmonização da mesma melodia.
  - Em *Frère Jacques* há 4 vozes canônicas: cada nota do tema atua em 3 modos harmônicos distintos (2a, 3a e 4a vozes), além de atuar como melodia (1a voz).

Cada nota em um canon tem mais de um significado musical

Canons mais complicados

1. O tom das cópias do tema pode ser modificado.
   - Ex: primeira voz em *Dó*; segunda voz em *Sol*; terceira voz em *Ré*.
2. As velocidades das cópias podem variar:
   - Diminuição: a segunda voz pode tocar o tema duas mais rápido;
   - Aumentação: ou mais devagar que a primeira.
3. Inversão: a segunda voz pode tocar a melodia invertida. Inicia na mesma nota, mas aos aumentos de tom no tema da primeira voz correspondem diminuições nos tons da segunda voz (inversão).
4. Canon Carangueijo: a segunda voz pode tocar o tema de trás para frente (canon – carangueijo).
5. Todas estas variações podem se misturar em diferentes vozes!

outro exemplo de canon: ‹link›

"Canon per tonos"

- CANON ETERNAMENTE RETORNANTE – "Canon per Tonos"
  - A voz mais aguda toca uma variante do tema real.
  - Outras duas vozes fazem uma harmonização canônica baseada em um segundo tema. A mais grave destas duas vozes toca o tema em *Dó menor* (o tom geral do Canon), e na mais aguda, o mesmo tema é tocado uma quinta acima (em *Sol menor*).
  - Mas quando o canon parece terminar, seu tom não é mais *Dó menor*, mas *Ré menor*.
  - Bach, conseguiu modular (mudar o tom) do canon de uma maneira suave, imperceptível.

"Canon per tonos" – volta estranha

- Então este suposto fim se liga com um novo começo do canon, agora modulado para *Ré menor*, que quando terminar, estará em *Mi menor*, e assim por diante.
- Estas modulações sucessivas dão ao ouvido uma sensação de afastamento, cada vez maior, do tom original do canon; de tal modo que após algumas modulações você jamais esperaria um retorno ao tom original.
- No entanto, é isso o que MAGICAMENTE ocorre. Após seis modulações o tom original, *Dó menor*, é restaurado, com todas as vozes estando uma oitava acima do que eram no início.
- Quando há este retorno ao tom, a peça pode, então, ser finalizada de uma forma musicalmente agradável. Sem deixar a sensação de não-resolução.
- Mas ela também pode continuar infinitamente, se fixamos a atenção apenas na última modulação, de *Lá# menor* para *Dó menor*.

Canon per Tonos: ‹link›

Volta estranha

- Este é nosso primeiro exemplo de volta estranha.

- "Um fenômeno que ocorre sempre que, movimentando para cima ou para baixo através dos níveis de algum sistema hierárquico, nós, inesperadamente, nos encontramos de volta ao lugar de partida".
    - O sistema aqui é o de tons musicais.

Maurits Cornelis Escher

- Artista gráfico holandês que viveu entre 1902 e 1972.

- Realizou belíssimas litogravuras e xilogravuras envolvendo esta mesma idéia das VOLTAS ESTRANHAS.

- Seus desenhos são paradoxais, geram ilusões óticas e se baseiam, quase sempre, no mesmo tipo de fenômeno que possibilita os canons e a volta estranha de Bach:

o DUPLO SIGNIFICADO de certos elementos gráficos.

Waterval
(Queda d'agua)
litografia de 1961

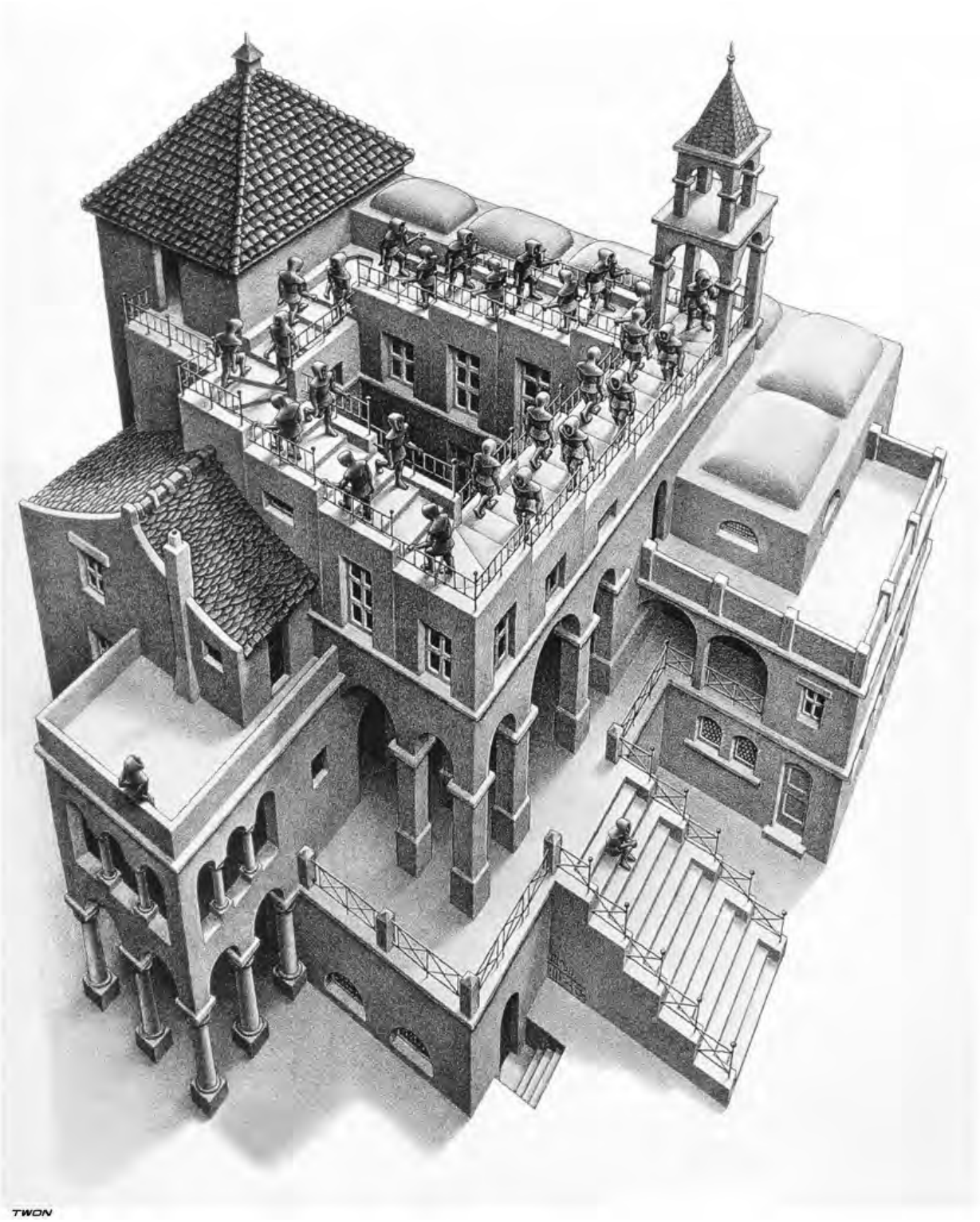
Queda d'agua ~ Canon per tonos

- Compare o padrão infinitamente descendente de 6 passos da "Queda d'agua" de Escher, com o padrão infinitamente ascendente de 6 passos do "Canon per Tonos" de Bach.

- Repare no duplo-significado das linhas do caminho da água pelo canal que, avaliados localmente parecem descer, mas avaliados globalmente parecem subir!

- A similaridade é notável. Bach e Escer estão executando um único tema em duas chaves diferentes: música e desenho.

Queda d'agua e Canon per Tonos: a mesma idéia em Diferentes Meios



Klimmen en dalen
(Subindo e descendo)
litografia de 1960

Mais voltas estranhas

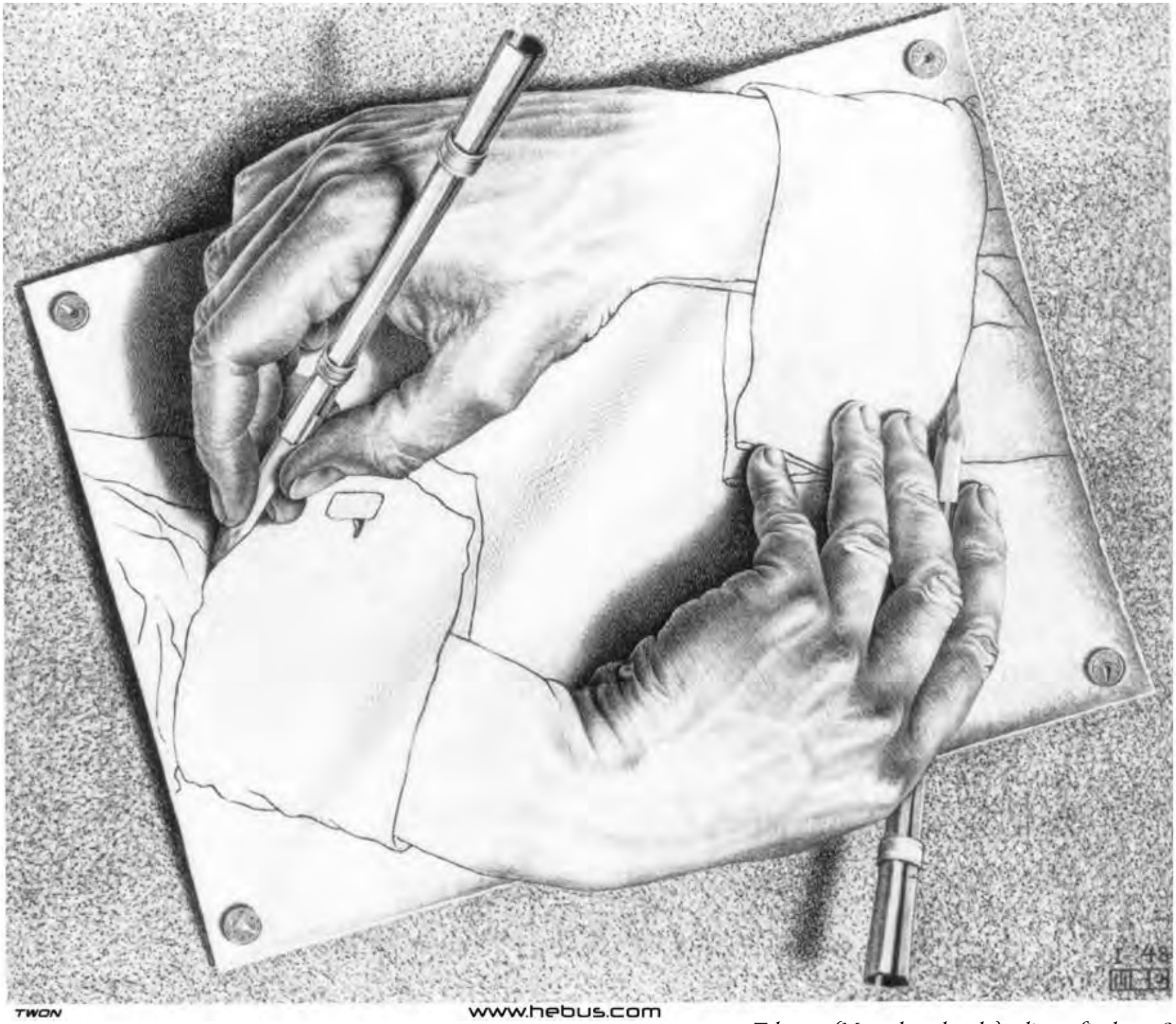
- Duas filas de monges: uma presa para sempre em uma subida eterna e outra em uma descida eterna.

- É uma versão de volta estranha menos apertada, pois há mais degraus (passos) (45) até os monges voltarem para o ponto de partida.

- Novamente repare no duplo-significado das linhas.

- As faces do fundo e da direita, avaliadas localmente são subidas, mas avaliadas globalmente, produzem a decida necessária para os monges voltarem ao ponto de partida.

- A seguir, uma volta estranha mais apertada, em dois passos, e uma em um único passo!



Tekenen (Mãos desenhando) – litografia de 1948.

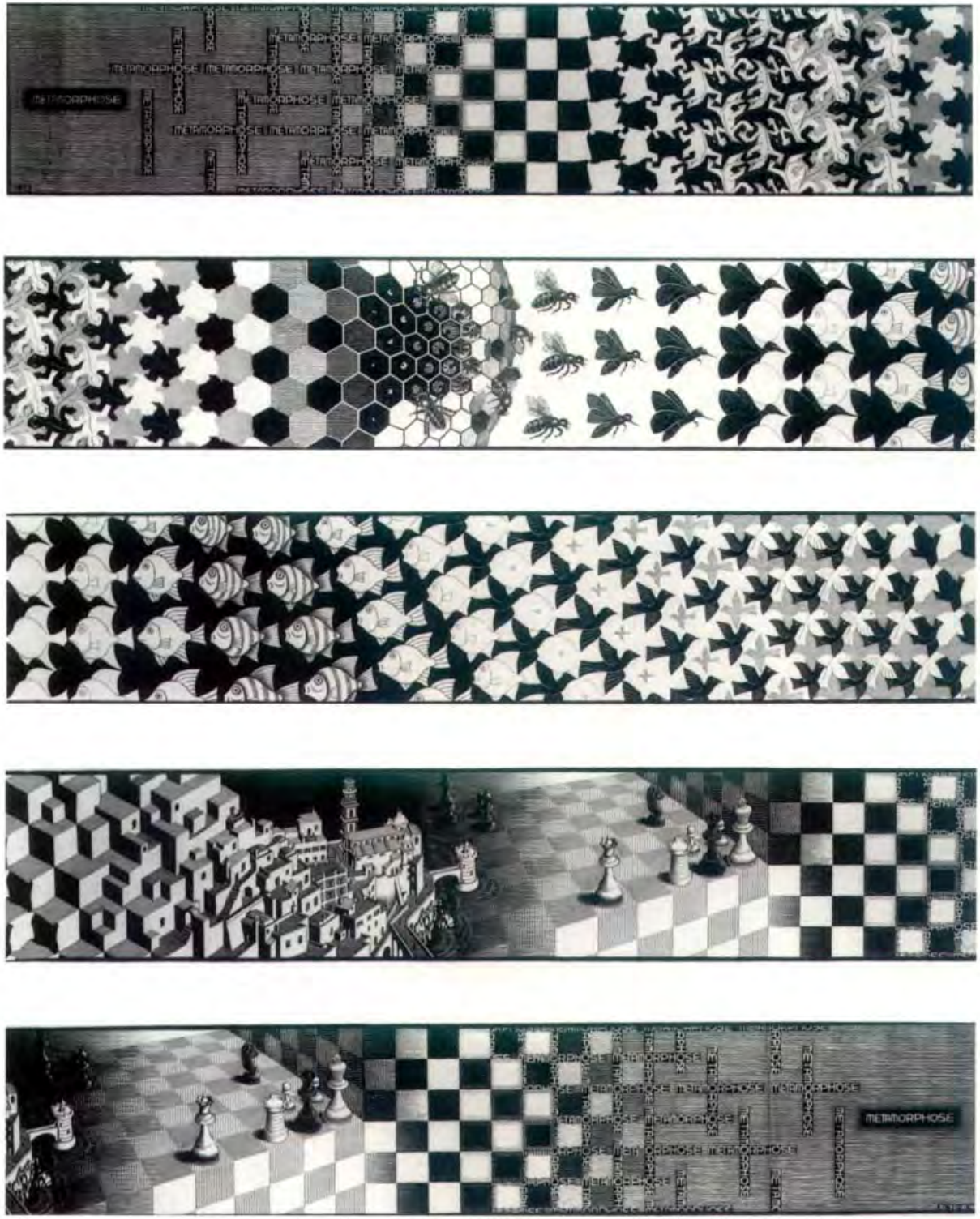
Prentententoonstelling
(Galeria de gravuras)
litografia de 1956.

Voltas estranhas e o infinito

- Outro exemplo de uma volta estranha? - Se sairmos em linha reta, sempre em frente, sem jamais mudar de direção, avançando sempre para cada vez mais longe do ponto de partida, acabamos por voltar ao mesmo ponto, quando completamos uma volta na terra!!

- O conceito de infinito está implícito no de VOLTA ESTRANHA, afinal de contas, o que é uma volta (um loop) senão uma maneira de representar de modo finito um processo sem fim?

- A infinidade desempenha um importante papel nos desenhos de Escher. Cópias de um tema único, freqüentemente encaixam-se umas nas outras, produzindo um análogo visual para os canons de Bach.

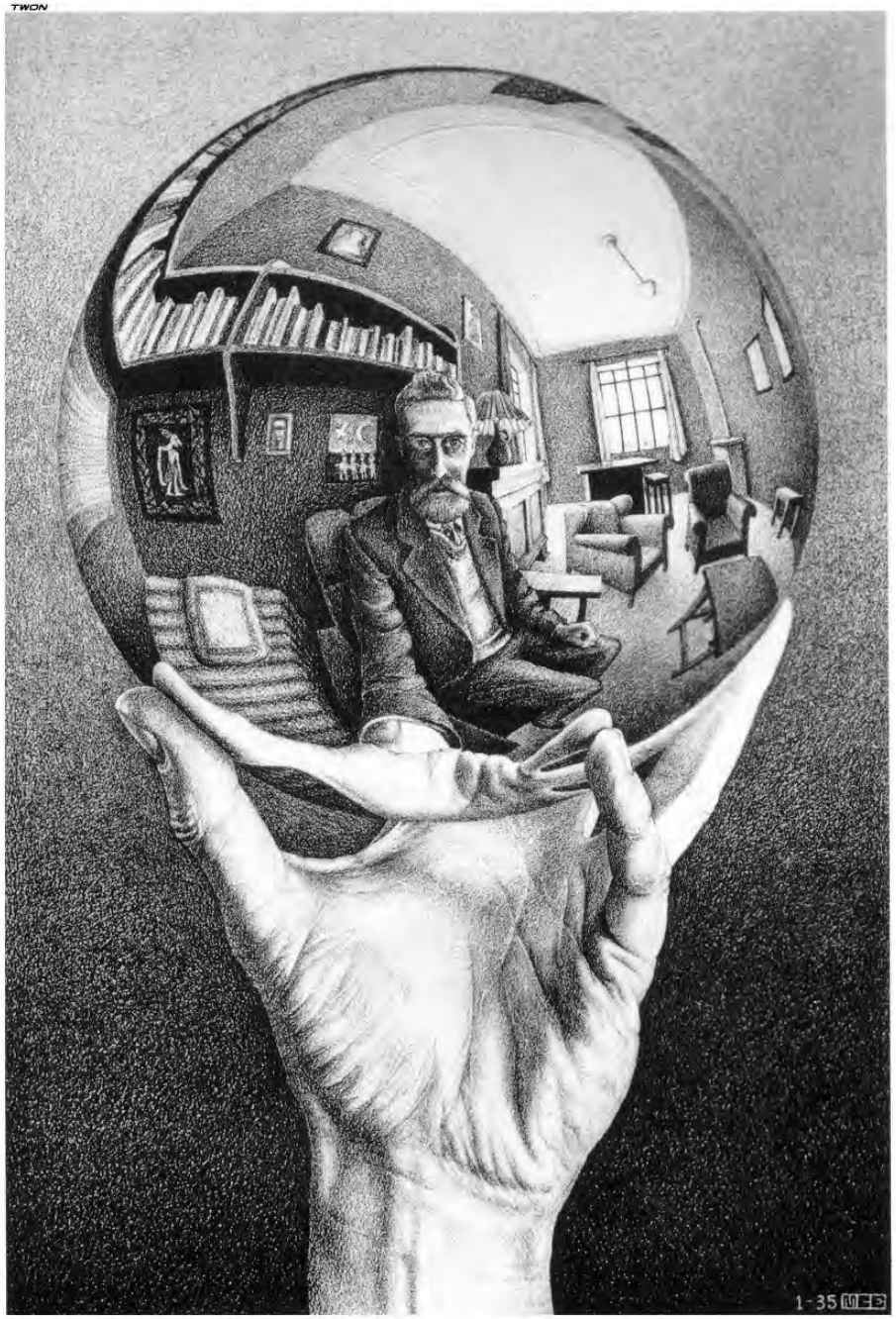


Metamorphose
(Metamorfose)
litografia de 1939-40.

Metamorfose ~ canon per tonos

- Metamorfose é similar ao "canon per tonos" de Bach. Afastando-se cada vez mais de seu ponto de partida, subitamente volta-se a ele.

- Em alguns trabalhos de Escher, um mesmo desenho aparece em diferentes níveis de realidade, indicando uma noção ainda mais incomum do infinito.
  - Por exemplo, um nível pode ser reconhecido como fantasia, ou imaginação, outro nível, como realidade. Além destes dois níveis explicitamente desenhados, há também a sugestão de que quem aprecia o desenho, coloque a si próprio como parte de um outro nível, e ao fazer isso, não podemos mais evitar de sermos capturados na cadeia de níveis implicada por Escehr, na qual, para cada nível, há sempre um outro de "mais realidade", acima, da mesma forma que há um nível "mais imaginário" abaixo.
  - O que aconteceria então se estes níveis não fossem lineares, mas formassem um loop, uma volta? O que seria imaginário e o que seria fantasia?



Hand met spiegelende bol
(Mão com globo que reflete)
litografia de 1935 (GEB)

Boven en onder
(Acima e abaixo)
litografia de 1935

Voltas estranhas e matemática

- Nas voltas estranhas de Bach e Escher há um conflito entre finito e infinito, que gera um forte sentido de paradoxo.

- A intuição sente que há algo de matemático envolvido. O próprio Escher certa vez se referiu assim sobre seu trabalho:

"...todos os trabalhos reproduzidos neste livro foram feitos com a intenção de expressar uma idéia particular. Estas idéias estão baseadas no meu assombro e admiração pelas leis contidas no mundo que nos cerca. Quem se maravilha de algo, toma consciência de algo maravilhoso. Mantendo alerta meu olhar frente aos enigmas do mundo, e meu interesse em sua plasmação sensível, entro em contato, de certo modo, com o domínio das matemáticas. Apesar de não ter nenhuma formação nas ciências exatas, nem conhecimentos especializados, com freqüência me sinto mais próximo dos matemáticos do que de meus colegas de profissão."

M. C. Escher – "Estampas e Desenhos" – TASCHEN, 1989.

Kurt Gödel

- 1906 – 1978.

- Em 1931, com apenas 26 anos, o matemático austríaco Kurt Gödel descobriu uma contrapartida matemática para este fenômeno das voltas estranhas.

- Tal descoberta teve uma repercussão fenomenal que ainda perdura e até hoje é fruto de discussão nos círculos matemáticos e filosóficos.

- Em sua forma mais absolutamente simplificada, a descoberta de Gödel envolve a translação de um antigo paradoxo da filosofia (o Paradoxo de Epimênides – ou do Mentiroso) em termos matemáticos.

Paradoxo do mentiroso

- Epimênides era um cretense (natural da ilha de Creta) que fez uma declaração imortal:

Todos os cretenses são mentirosos

- Uma versão mais acurada da mesma declaração seria simplesmente:

Eu estou mentindo

ou

Esta sentença é falsa

- Estas sentenças violam de uma maneira bastante rude a distinção que normalmente fazemos entre sentenças verdadeiras e falsas.

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V ⇒ o que 1 diz está **correto**

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V ⇒

o que 1 diz está correto

mas 1 diz que 1 é falsa

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V ⇒

o que 1 diz está correto

mas 1 diz que 1 é falsa

então está correto que 1 é falsa

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V ⇒

o que 1 diz está correto
mas 1 diz que 1 é falsa
então está correto que 1 é falsa
logo 1 é falsa.

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Rightarrow$

o que 1 diz está correto
mas 1 diz que 1 é falsa
então está correto que 1 é falsa
logo 1 é falsa.

$\Downarrow$

1 é F

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Downarrow$

1 é F $\Rightarrow$ o que 1 diz está **incorreto**

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Downarrow$

1 é F $\Rightarrow$

o que 1 diz está incorreto

mas 1 diz que 1 é falsa

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Downarrow$

1 é F $\Rightarrow$

o que 1 diz está incorreto

mas 1 diz que 1 é falsa

então está incorreto que 1 é falsa

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Downarrow$

1 é F $\Rightarrow$

o que 1 diz está incorreto
mas 1 diz que 1 é falsa
então está incorreto que 1 é falsa
logo 1 é verdadeira

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

1 é V

$\Downarrow$

1 é F

$\Downarrow$

1 é V

$\vdots$

Volta estranha e o paradoxo do mentiroso

1.	Esta sentença é falsa

- Se você a supõe que 1 é verdadeira, então ela imediatamente se volta contra esta suposição forçando-o considerá-la falsa.

- Se você, por outro lado, supõe que 1 é falsa, ela novamente volta-se contra sua suposição e o força a considerá-la verdadeira.

- O paradoxo de epimênides é uma volta estranha de um passo, como a *Galeria de Gravuras* de Escher.

O que isto tem a ver com a matemática ?

- Esta foi a descoberta genial de Gödel !

Matemática instrospectiva

- "Esta sentença é falsa" é uma **sentença introspectiva**, que fala de si mesmo.

- A idéia de Gödel foi tornar a **matemática introspectiva**:

  - Utilizar o próprio raciocínio matemático como instrumento de reflexão sobre o raciocínio matemático.

- A principal conseqüência desta introspecção da matemática foi o seu famoso **Teorema da Incompletude**.

A pérola e a ostra

- O Teorema de Gödel aparece como a Proposição VI em seu artigo de 1931 "Sobre Proposições Formalmente Indecidíveis nos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos I":

> A cada classe **k**, recursiva e ω-consistente, há uma classe de signos **r**, tal que nem **v Gen r** nem **Neg(v Gen r)** pertence a **Flg(k)** (onde **v** é a variável livre de **r**).

- Paráfrase em português:

> Todas as formulações axiomáticas consistentes da Teoria dos Números incluem proposições indecidíveis.

- É difícil ver uma volta estranha aqui. É porque a volta estranha não aparece no resultado (a pérola), mas em sua demonstração (a ostra).

Matemática instrospectiva e a prova de Gödel

- A prova do Teorema da Incompletude de Gödel depende da obtenção de uma afirmação matemática auto-referente similar ao paradoxo do mentiroso.

- Mas, apesar de ser bastante fácil usar a linguagem para falar de linguagem, não é nada fácil perceber como uma afirmação sobre números pode falar sobre si própria.

- A própria concepção desta idéia já atesta a genialidade de Gödel. A criação da afirmação matemática introspectiva foi a realização desta magnífica centelha de intuição.

Afirmações $\neq$ Afirmações sobre afirmações

- Afirmações matemáticas, mais especificamente afirmações da teoria dos números, afirmam propriedades dos números inteiros.

1. "Há infinitos números primos";
2. "Todo número par maior que 4 pode ser expresso como a soma de dois números primos".

- Já afirmações sobre afirmações da teoria dos números não afirmam propriedades dos números inteiros, mas propriedades das afirmações sobre números inteiros, tais como:

- "A afirmação (1) é demonstrável".
- "Não se conhece nenhum contra-exemplo para a afirmação (2) que, no entanto, ainda não foi demonstrada."

Enumerando as afirmações sobre os números

- Mas Gödel percebeu que se enumerássemos as afirmações sobre os números, então certas afirmações sobre afirmações sobre os números poderiam se tornar afirmações sobre números, tais como:

Afirmações sobre os Números	Afirmações sobre Afirmações sobre os Números
⋮ (n) há infinitos números primos ⋮ (m) 75 é impar ⋮	A afirmação "Há infinitos números primos" é demonstrável. $\Downarrow$ n é demonstrável

Enumerando as afirmações sobre os números

- Gödel também mostrou que a propriedade de **ser demonstrável**, quando aplicada aos números das sentenças, tornava-se uma propriedade de números legítima (como ser par, ser primo,...)

- Ou seja, dado um número qualquer n, há uma **conta** que diz se n é demonstrável ou não.

- Portanto, a afirmação "n é demonstrável" também faz parte da enumeração de todas as afirmações sobre os números:

Afirmações sobre os Números
⋮
(n) há infinitos números primos
⋮
(m) 75 é impar
⋮
(k) n é demonstrável
⋮

A matemática avalia a matemática

- "Fazendo uma conta" matemática, conseguimos saber se a sentença (n) é verdadeira ou falsa.

  - Gödel conseguiu uma maneira de <u>usar a matemática para avaliar a matemática</u>.

  - A matemática tornou-se introspectiva.

- O próximo passo foi construir uma única sentença auto-referente (que fala de si mesma) que reproduza o paradoxo do mentiroso.

A sentença auto-referente de Gödel

- Gödel mostrou que em sua lista de sentenças havia uma determinada sentença (a *g*-ésima sentença de sua lista) que afirmava o seguinte:

Afirmações sobre os Números
⋮
(n) há infinitos números primos
⋮
(m) 75 é impar
⋮
(k) n é demonstrável
⋮
(g) g não é demonstrável
⋮

- Ou seja a g-ésima sentença afirma, de si própria, que ela não é demonstrável.

A sentença auto-referente de Gödel

- **DUPLO PAPEL DE *g*:**

- **<u>AFIRMAÇÃO SOBRE OS NÚMEROS</u>**: um certo número que não satisfaz uma propriedade numérica (ser-demonstrável)

- **<u>AFIRMAÇÃO SOBRE AFIRMAÇÃO SOBRE OS NÚMEROS</u>**: uma afirmação da teoria dos números (a g-ésima) não é formalmente demonstrável.

Bach	–	Notas musicais com múltiplas funções harmônicas.
Escher	–	Linhas com múltiplas funções gráficas.
Gödel	–	Afirmações sobre números com múltiplos significados.

A volta estranha na matemática

***g*.**	***g* não é demonstrável**

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é **V**

A volta estranha na matemática

g.	g não é demonstrável

g é **V** $\Rightarrow$

- o que g diz está correto

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V $\Rightarrow$

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V $\Rightarrow$

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V $\Rightarrow$

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

***g* é V** ⇒

- o que *g* diz está correto
- mas *g* diz que não há prova formal para *g*
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

***g* é F**

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V ⇒

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

g é F ⇒

- o que g diz está incorreto

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V ⇒

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

g é F ⇒

- o que g diz está incorreto
- mas g diz que não há prova formal para g

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V $\Rightarrow$

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

g é F $\Rightarrow$

- o que g diz está incorreto
- mas g diz que não há prova formal para g
- logo há prova formal para g

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V ⇒

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

g é F ⇒

- o que g diz está incorreto
- mas g diz que não há prova formal para g
- logo há prova formal para g
- então há uma sentença falsa da teoria dos números para a qual há uma prova formal

A volta estranha na matemática

g.	*g* não é demonstrável

g é V ⇒

- o que g diz está correto
- mas g diz que não há prova formal para g
- então há uma sentença verdadeira da teoria dos números para a qual não há prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incompleto

g é F ⇒

- o que g diz está incorreto
- mas g diz que não há prova formal para g
- logo há prova formal para g
- então há uma sentença falsa da teoria dos números para a qual há uma prova formal
- logo o sistema formal para a teoria dos números é incorreto

O teorema de Gödel

g é **V** $\Rightarrow$ O sistema formal para a teoria dos números é incompleto.

O teorema de Gödel

***g* é V**	$\Rightarrow$	O sistema formal para a teoria dos números é incompleto.
***g* é F**	$\Rightarrow$	O sistema formal para a teoria dos números é incorreto

O teorema de Gödel

***g* é V** ⇒ O sistema formal para a teoria dos números é incompleto.

***g* é F** ⇒ O sistema formal para a teoria dos números é incorreto

Na hipótese de sua consistência, a aritmética é incompleta.

O teorema de Gödel

***g* é V** ⇒ O sistema formal para a teoria dos números é incompleto.

***g* é F** ⇒ O sistema formal para a teoria dos números é incorreto

Na hipótese de sua consistência, a aritmética é incompleta.

Não é possível capturar completamente em um sistema formal nem a nossa própria aritmética

Arte e matemática

- Gödel nos mostrou como ressignificar sentenças da matemática (afirmações da teoria dos números) em sentenças da metamatemática (afirmações sobre afirmações da teoria dos números). Tornou assim a matemática introspectiva.

- Ao aplicar aos sistemas formais para a matemática o nosso impulso artístico fundamental de ressignificação, construiu uma volta estranha que evidenciou os limites dos sistemas formais.

É justamente porque somos, todos nós, um pouco artistas, porque deslocamos, reinterpretamos, ressignificamos, que nossas habilidades não se resumem a regras formais.

Hofstadter - Gödel, Escher e Bach

- Douglas Hofstadter escreveu um dos mais estimulantes e desafiadores livros de todos os tempos. Lúdico, profundo, abrangente, brilhante!

- Ele nos mostra que somos maiores que nossas regras; que nossa criatividade é maior que nosso cálculo, mas nem por isso abandona ou desiste da razão e do cálculo

- Esse nosso impulso criativo de ressignificação é característico da arte. É ele que nos diferencia essencialmente de nossas máquinas e nos faz humanos.

Aguilar – O que é a arte ?

depoimento de Aguilar: ‹link›

Aguilar – O que é a arte ?

A arte é o que distingue a vida da mera sobrevivência. Sem arte não há vida, não há humanidade.

Nós, humanos, somos únicos entre os outros seres vivos e não vivos, porque só nós significamos e ressignificamos.

Só nós somos artistas!

Nós, humanos, somos únicos entre os outros seres vivos e não vivos, porque só nós significamos e ressignificamos.

Só nós somos artistas!

Fim